2.9.24 Logaritmické nerovnice I

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\log_2(x+1)<2$.

Podmínka: $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$\log_2(x+1)<2$ $\quad\log_2(x+1)<\log_2 2^2$ $\quad\log_2(x+1)<\log_2 4$ $\quad(x+1)<4$

$x<3$ $\quad K=(-1;3)$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<-1$.

Podmínka: $2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<-1$ $\quad\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ $\quad\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<\log_{\frac{1}{2}}2$

$2x-1>2$ $\quad 2x>3$ $\quad x>\frac{3}{2}$ $\quad K=\left(\frac{3}{2};\infty\right)$

Při řešení logaritmických nerovnic musíme dávat pozor na:

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\log_3(x+2)<\log_3(3-x)$.

Podmínky: $x+2>0 \Rightarrow x>-2$, $3-x>0 \Rightarrow 3>x$.

$\log_3(x+2)<\log_3(3-x)$ $\quad x+2<3-x$ $\quad 2x<1$

$x<\frac{1}{2}$, musíme splnit podmínky $x>-2$, $x<3$ $\Rightarrow$ $\quad K=\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\log_{0,5}x+\log_{0,5}(x+3)\geq 2\log_{0,5}2$.

Podmínky: $x>0$, $x+3>0 \Rightarrow x>-3$.

$\log_{0,5}x+\log_{0,5}(x+3)\geq 2\log_{0,5}2$ $\quad\log_{0,5}x(x+3)\geq\log_{0,5}2^2$

$\log_{0,5}x^2+3x\geq\log_{0,5}4$ $\quad x^2+3x\leq 4$ $\quad x^2+3x-4\leq 0$

$(x+4)(x-1)\leq 0$ Zdá se, že řešením je interval $\langle -4;1\rangle$, musíme splnit podmínky $x>0$, $x>-3$ $\quad\Rightarrow\quad K=(0;1\rangle$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\log|x-3|<2$.

Podmínky: $|x-3|>0 \Rightarrow x\neq 3$.

$\log|x-3|<2$ $\quad\log|x-3|<\log 10^2$ $\quad|x-3|<100$ - hledáme čísla, vzdálená od 3 o méně než 100 $\Rightarrow$ interval $(-97;103)$ podmínku $x\neq 3$ $\Rightarrow$ $K=(-97;3)\cup(3;103)$.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\log_x 9<4$.

Podmínky: $x>0$, $x\neq 1$.

a) pomocí definice logaritmu

$\log_x 9<\log_x x^4$, $0<x<1$ (základ logaritmu je menší než 1 $\Rightarrow$ obracíme znaménko nerovnosti) $9>x^4$ $\quad /\sqrt[4]{\ }$ ($x>0$ kvůli podmínce v logaritmu) $\sqrt[4]{9}>x$ $\quad x<\sqrt{3}$	$\log_x 9<\log_x x^4$, $x>1$ (základ logaritmu je větší než 1 $\Rightarrow$ neobracíme znaménko nerovnosti) $9<x^4$ $\quad /\sqrt[4]{\ }$ ($x>0$ kvůli podmínce v logaritmu) $\sqrt[4]{9}<x$ $\quad x>\sqrt{3}$

$\Rightarrow K_1 = (0;1)$.

$\Rightarrow K_2 = \left(\sqrt{3};\infty\right)$.

$K = K_1 \cup K_2 = (0;1) \cup \left(\sqrt{3};\infty\right)$

b) pomocí vzorce na změnu základu

Nahradíme $\log_x 9$ podílem logaritmů: $\log_x 9 = \dfrac{\log_9 9}{\log_9 x} = \dfrac{1}{\log_9 x}$.

$\log_x 9 < 4 \qquad \dfrac{1}{\log_9 x} < 4$

$\log_9 x < 0 \Rightarrow x < 1$

$\dfrac{1}{\log_9 x} < 4 \quad / \cdot \log_9 x \qquad 1 > 4\log_9 x$

$\dfrac{1}{4} > \log_9 x \qquad \log_9 9^{\frac{1}{4}} > \log_9 x$ -

$\sqrt[4]{9} > x \qquad x < \sqrt{3} \qquad \Rightarrow K_1 = (0;1)$.

$\log_9 x > 0 \Rightarrow x > 1$

$\dfrac{1}{\log_9 x} < 4 \quad / \cdot \log_9 x$

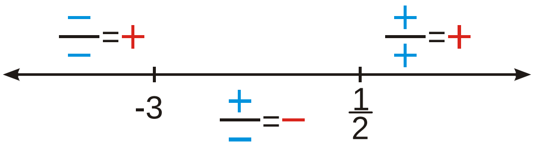
$1 < 4\log_9 x \qquad \dfrac{1}{4} < \log_9 x \qquad \log_9 9^{\frac{1}{4}} < \log_9 x$ -

$\sqrt[4]{9} < x \qquad x > \sqrt{3} \qquad \Rightarrow K_2 = \left(\sqrt{3};\infty\right)$.

$K = K_1 \cup K_2 = (0;1) \cup \left(\sqrt{3};\infty\right)$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $\log_{0,5} \dfrac{x+3}{2x-1} \leq 0$.

Podmínky: $\dfrac{x+3}{2x-1} > 0 \Rightarrow$ Nulové body: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$, $2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.



$x \in (-\infty;-3) \cup \left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$

$\log_{0,5} \dfrac{x+3}{2x-1} \leq 0 \qquad \log_{0,5} \dfrac{x+3}{2x-1} \leq \log_{0,5} 1$

$\dfrac{x+3}{2x-1} \geq 1$

$x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme nerovnost.

$x+3 \leq 2x-1$

$4 \leq x$

Zdá se, že řešením je interval $\langle 4;\infty)$, počítáme s čísly $x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow K_1 = \emptyset$.

$x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ nerovnost zachováváme.

$x+3 \geq 2x-1$

$4 \geq x$

Zdá se, že řešením je interval $(-\infty;4\rangle$, počítáme s čísly $x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow K_2 = \left(\dfrac{1}{2};4\right\rangle$.

$K = K_1 \cup K_2 = \left(\dfrac{1}{2};4\right\rangle$

Př. 8: Petáková:
strana 38/cvičení 29 b) d) f)
strana 38/cvičení 30 c) e)
strana 38/cvičení 31 c)
strana 38/cvičení 34 a)
strana 38/cvičení 37 d) g)